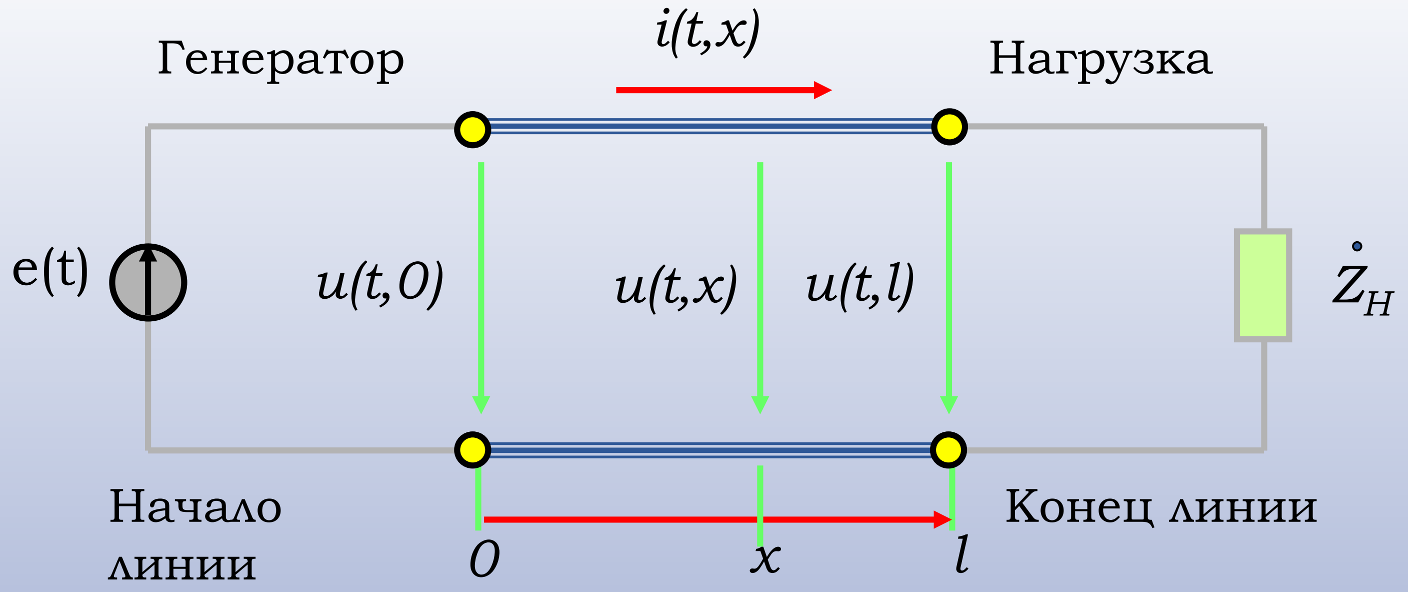
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Лектор:
к.ф.-м.н.,асс.профессор Алимгазинова Назгуль Шакаримовна

10 лекция. Цепи с распределенными параметрами

Основные понятия

Цепи с распределенными параметрами играют важную роль в современной электросвязи и радиотехнике. Например: при передаче электромагнитной энергии в линиях связи, фидере, антенне, волноводе следует учитывать, что магнитное и электрическое поля распределены по всей длине этих устройств и превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит по всей длине этих устройств.



$u(t,0)$ - мгновенное значение напряжения в начале линии

$u(t,x)$ - мгновенное значение напряжения в точке с координатой x

$u(t,l)$ - мгновенное значение напряжения в конце линии

Под **<u>генератором e(t)</u>** будем понимать источник сигналов, микрофон, усилитель, выходной каскад передатчика.

В качестве **комплексной нагрузки $Z_{Н}$** может быть телефон, антенна.

Ток и напряжение на выходе в конце сколь угодно малого участка (отрезка) цепи с распределенными параметрами не равны соответственно току и напряжению на его входе и отличаются как по величине, так и по фазе.

Ток и напряжение в любой точке цепи являются не только функциями времени t, но и пространственных координат (*например – x –расстояние от одного из концов линии.*

Цепи с распределенными параметрами характеризуются проходящими в них волновыми процессами. <u>Поэтому напряжения и токи изменяются не только во времени, но и в пространстве</u>: **u(t,x); i(t,x)**

$$u(t,x) = u(t+T,x)$$

$$T - период$$

В любой точке с координатой *x*

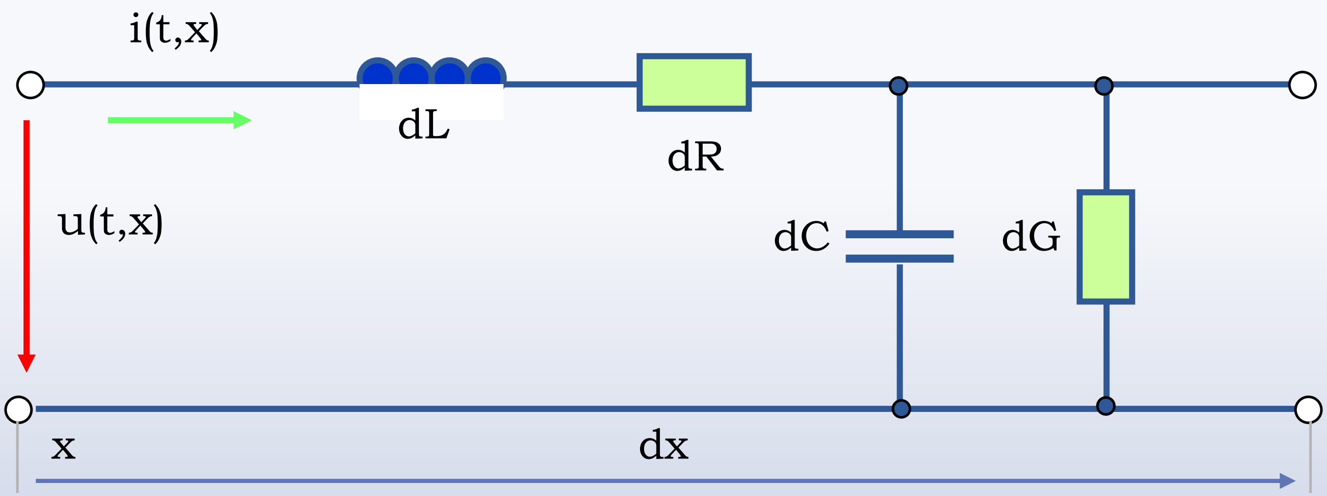
$$u(t_0,x) = u(t_0,x+\lambda)$$

$$\lambda - длина \rightarrow волны$$

В любой фиксированный момент времени t_0

Длинными линиями называются линии, геометрическая длина *l* которых больше длины волны λ в 10 раз: ***l > 10λ.***

Рассматривая цепь переменного тока, образованную двумя параллельными проводниками большой протяженности, любой бесконечно малый участок этой длинной линии **dx** можно представить в виде эквивалентной схемы, состоящей из сосредоточенных бесконечно малых отрезков **dL,dR,dC,dG**



- **dL** – характеризует результирующую индуктивность верхнего и нижнего проводов;
- **dR**– характеризует результирующее сопротивление потерь в проводах;
- **dC**– характеризует величину емкости между проводами;
- **dG**– характеризует проводимость утечки между проводами;

Эквивалентная схема всей линии конечной длины содержит бесконечное множество аналогичных звеньев, соединенных последовательно.

Первичные параметры длинной линии

В практических целях вместо бесконечно малых величин **dL,dR,dC,dG** удобнее использовать так называемые первичные параметры (погонные) параметры линии, рассчитанные на единицу длины.

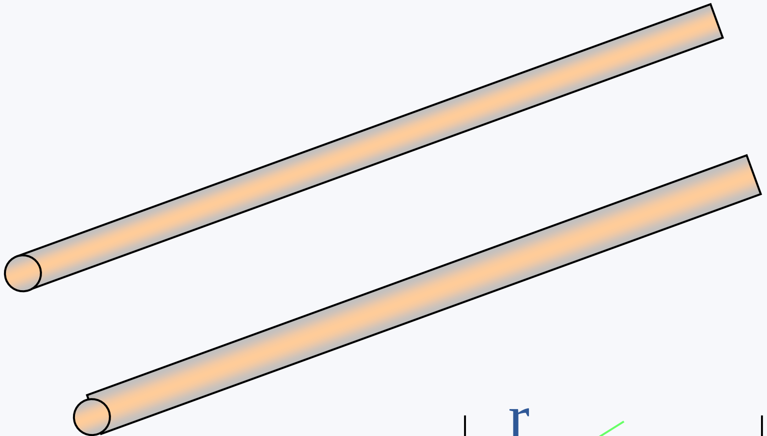
$$R_0 = \frac{dR}{dx}$$ → погонное сопротивление, Ом/м

$$L_0 = \frac{dL}{dx}$$ → погонная индуктивность, Гн/м

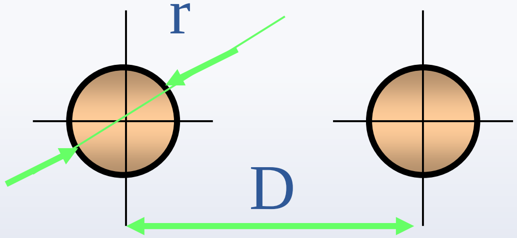
$$C_0 = \frac{dC}{dx}$$ → погонная емкость, Ф/м

$$G_0 = \frac{dG}{dx}$$ → погонная проводимость, См/м

Однородной длинной линией называется такая линия, первичные параметры которой неизменны (постоянны) по всей ее длине.



Открытая медная двухпроводная линия для радио частот образована двумя параллельными цилиндрическими проводниками на расстоянии **D** между осями и с радиусами **r**.



$$R_0 = \frac{8{,}33 \cdot 10^{-3}}{r}\sqrt{f} \rightarrow [\text{Ом}/\text{м}]$$

$$G_0 = 0{,}01 \cdot 10^{-6} + 0{,}05 \cdot 10^{-9} \cdot f \rightarrow [\text{См}/\text{м}]$$

$$C_0 = 1{,}05 \frac{10^{-6}}{36 \ln(D/r)} \rightarrow [\Phi/\text{м}]$$

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln\frac{D}{r} \rightarrow [\Gamma\text{н}/\text{м}]$$

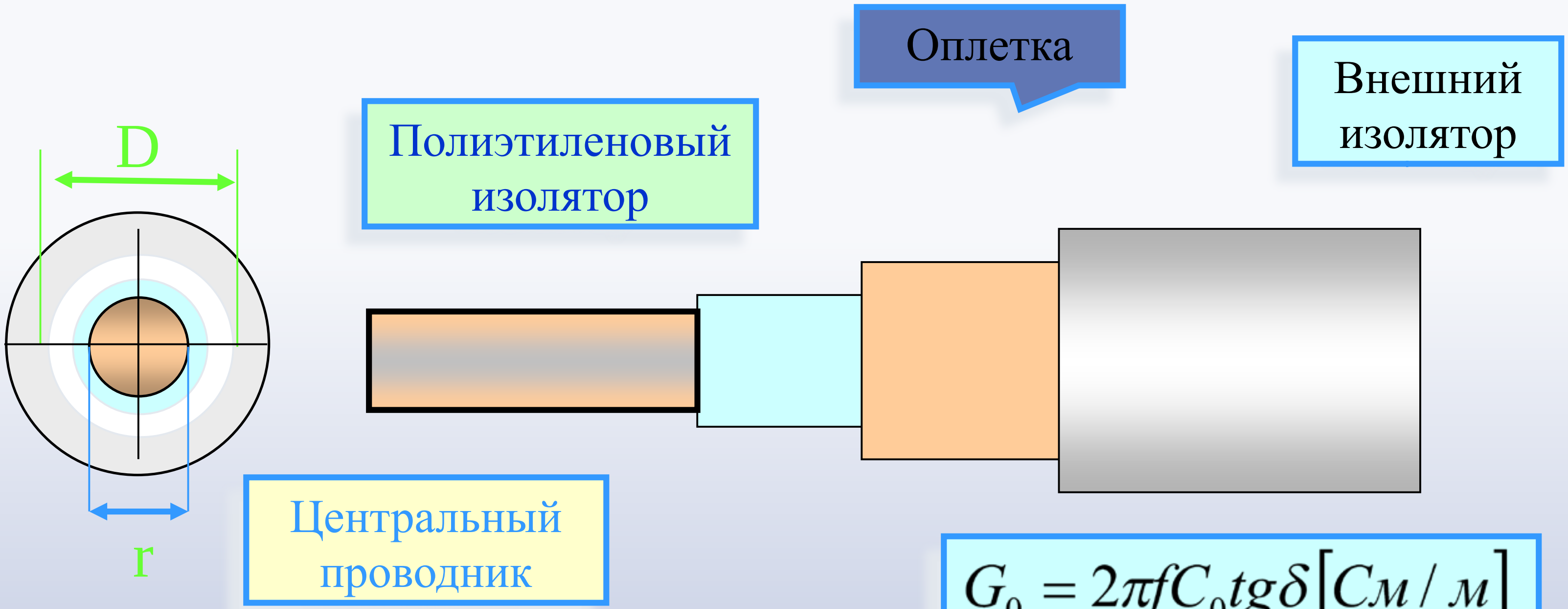
$$Z_B = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{D-r}{r}\right) \rightarrow [\text{Ом}]$$

Z_B - волновое сопротивление линии, Ом;

D – расстояние между медными проводниками линии, мм;

ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость; r – радиус проводов, мм;

Коаксиальная линия для радио частот, состоящая из сплошного внутреннего проводника диаметром **d** и внешнего экрана с внутренним диаметром **D**, пространство между проводниками заполнено диэлектриком.



$$G_0 = 2\pi f C_0 tg\delta\left[См/м\right]$$

$$R_0 = 8{,}33\sqrt{f}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{D}\right) \to \left[Ом/м\right]$$

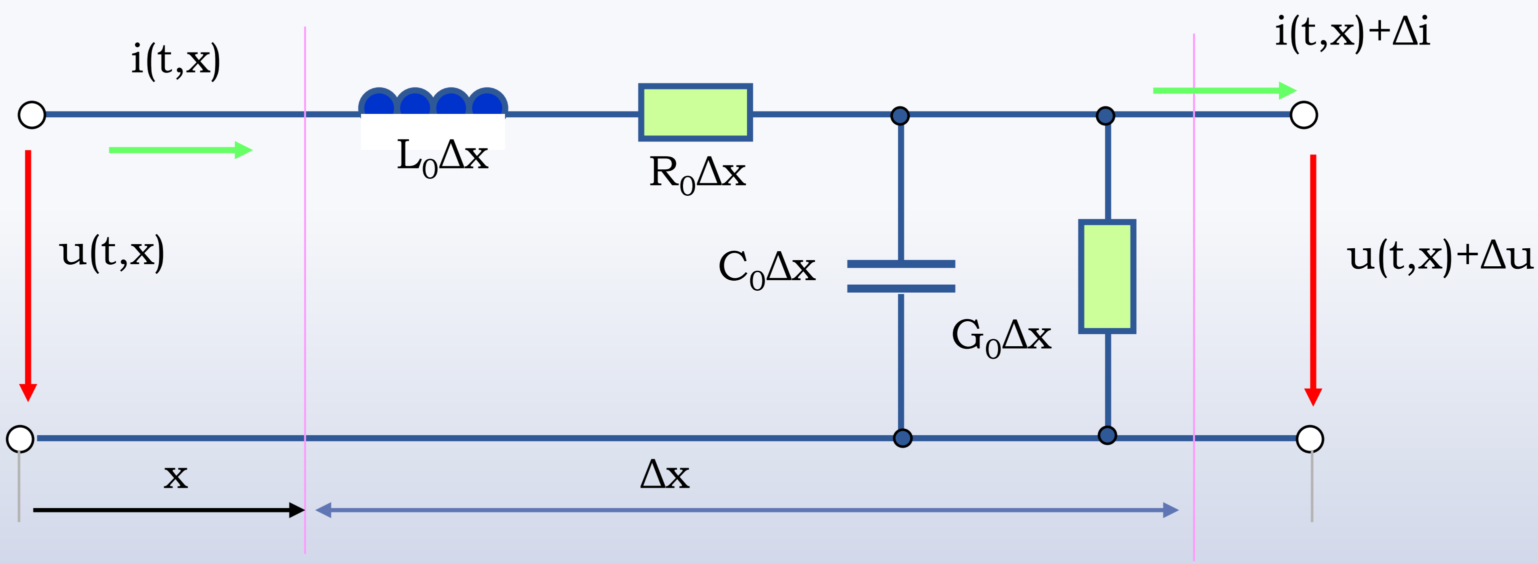
$$L_0 = 2\cdot 10^{-4}\ln\frac{D}{d} \to \left[Гн/м\right]$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_r \cdot 10^{-4}}{18\ln(D/d)} \to \left[Ф/м\right]$$

$$Z_B = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{D}{d}\right) \to \left[Ом\right]$$

Телеграфные уравнения и их общее решение для режима гармонических колебаний

Рассмотрим элементарный участок линии длиной Δx, находящийся на расстоянии x от начала линии



Уменьшение напряжения в конце участка линии Δx по сравнению с его началом **вызвано падением напряжения на индуктивности $L_0\Delta x$ и сопротивлении $R_0\Delta x$, а уменьшение тока** происходит **за счет ответвления тока через емкость $C_0\Delta x$ и проводимость изоляции $G_0\Delta x$**

$$\begin{cases} -\Delta u = L_0 \Delta x \cdot \dfrac{\partial i}{\partial t} + R_0 \Delta x \cdot i \\ -\Delta i = C_0 \Delta x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} + G_0 \Delta x \cdot u \end{cases}$$

Разделив обе части этих уравнений на **Δx и перейдя к пределу при Δx → 0,** получим дифференциальные уравнения линии

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} = L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} + R_0 \cdot i \\ -\dfrac{\partial i}{\partial t} = C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + G_0 \cdot u \end{cases}$$

Телеграфные уравнения

Найдем законы изменения амплитуд и фаз напряжений и токов в линии для режима установившихся гармонических колебаний (считая известным закон изменения токов и напряжений в линии)

Используя символический метод анализа гармонических колебаний:

$$u \Rightarrow \dot{U} \qquad i \Rightarrow \dot{I} \qquad \frac{du}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{U} \qquad \frac{di}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{I}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \dot{I} \\ -\dfrac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \dot{U} \end{cases}$$

Так как комплексные значения U и I являются функциями только x, то уравнения записываются не в частных, а в <u>полных производных</u>

Продифференцировав первое уравнение системы по x и подставив в него второе, получим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)\cdot(G_0 + j\omega C_0)\cdot\dot{U}$$

Введя в рассмотрение обозначение

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)\cdot(G_0 + j\omega C_0)}$$

Коэффициент распространения в линии

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\cdot\dot{U} = 0$$

Уравнение *Гельмгольца*
(волновое уравнение)

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{Z}_0\dot{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta = \gamma\cdot e^{j\varphi};$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

α -коэффициент ослабления, т.е. величина потерь в линии: α = γ cos(ϕ)

β -коэффициент фазы, т.е. величина фазового сдвига в линии: β = γ sin(ϕ)

Решение телеграфных уравнений

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2}-\gamma^2\cdot\dot{U}=0$$

Корни характеристического уравнения

$$p^2-\gamma^2=0\rightarrow p_{1,2}=\pm\gamma$$

Общее решение этого дифференциального уравнения для напряжения в точке *x* запишется в виде:

$$\dot{U}(x)=\dot{A}\cdot e^{-\dot{\gamma}x}+\dot{B}\cdot e^{\dot{\gamma}x}$$

Из первого уравнения системы выразим ток

$$\dot{I}=-\frac{1}{R_0+j\omega L_0}\cdot\frac{d\dot{U}}{dx}=-\frac{\dot{\gamma}}{R_0+j\omega L_0}(\dot{A}\cdot e^{-\dot{\gamma}x}-\dot{B}\cdot e^{\dot{\gamma}x})$$

$$\frac{R_0}{G_0}=\frac{L_0}{C_0}$$

Условие Хевисайда

$$\dot{Z}_B=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}}$$

Волновое сопротивление линии

Общее решение для тока

$$\dot{I}(x)=\frac{1}{\dot{Z}_B}(\dot{A}\cdot e^{-\dot{\gamma}x}-\dot{B}\cdot e^{\dot{\gamma}x})$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}\cdot e^{-\dot{\gamma} x} + \dot{B}\cdot e^{\dot{\gamma} x} \\ \dot{I}(x) = \dfrac{1}{\dot{Z}_B}(\dot{A}\cdot e^{-\dot{\gamma} x} - \dot{B}\cdot e^{\dot{\gamma} x}) \end{cases}$$

С учетом начальных условий при x = 0:

$$\dot{U}_x = \dot{U}(x=0) = \dot{U}_1$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}(x=0) = \dot{I}_1$$

Искомая система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A} + \dot{B} \\ \dot{I}_1 \dot{Z}_B = \dot{A} - \dot{B} \end{cases}$$

Решение

$$\dot{A} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2}$$

$$\dot{B} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2}$$

$$\dot{U}_x = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2} e^{-\dot{\gamma} x} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2} e^{\dot{\gamma} x}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2\dot{Z}_B} e^{-\dot{\gamma} x} - \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\cdot\dot{Z}_B}{2\dot{Z}_B} e^{\dot{\gamma} x}$$

Уравнения передачи однородной длинной линии

❑ Падающие и отраженные волны в длинных линиях

$$\dot{U}_x = \underbrace{\frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2}}\, e^{-\dot{\gamma} x} + \underbrace{\frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2}}\, e^{\dot{\gamma} x}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2\dot{Z}_B} e^{-\dot{\gamma} x} - \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2\dot{Z}_B} e^{\dot{\gamma} x}$$

$$\dot{A} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2} = \dot{U}_{П}(x)$$

$$\dot{B} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_B}{2} = \dot{U}_{O}(x)$$

С учетом таких обозначений запись уравнений передачи линии упростится

$$\dot{U}_x = \dot{U}_{П}(x) \cdot e^{-\dot{\gamma} x} + \dot{U}_{O}(x) \cdot e^{\dot{\gamma} x} = \dot{U}_{ПАД}(x) + \dot{U}_{OTP}(x)$$

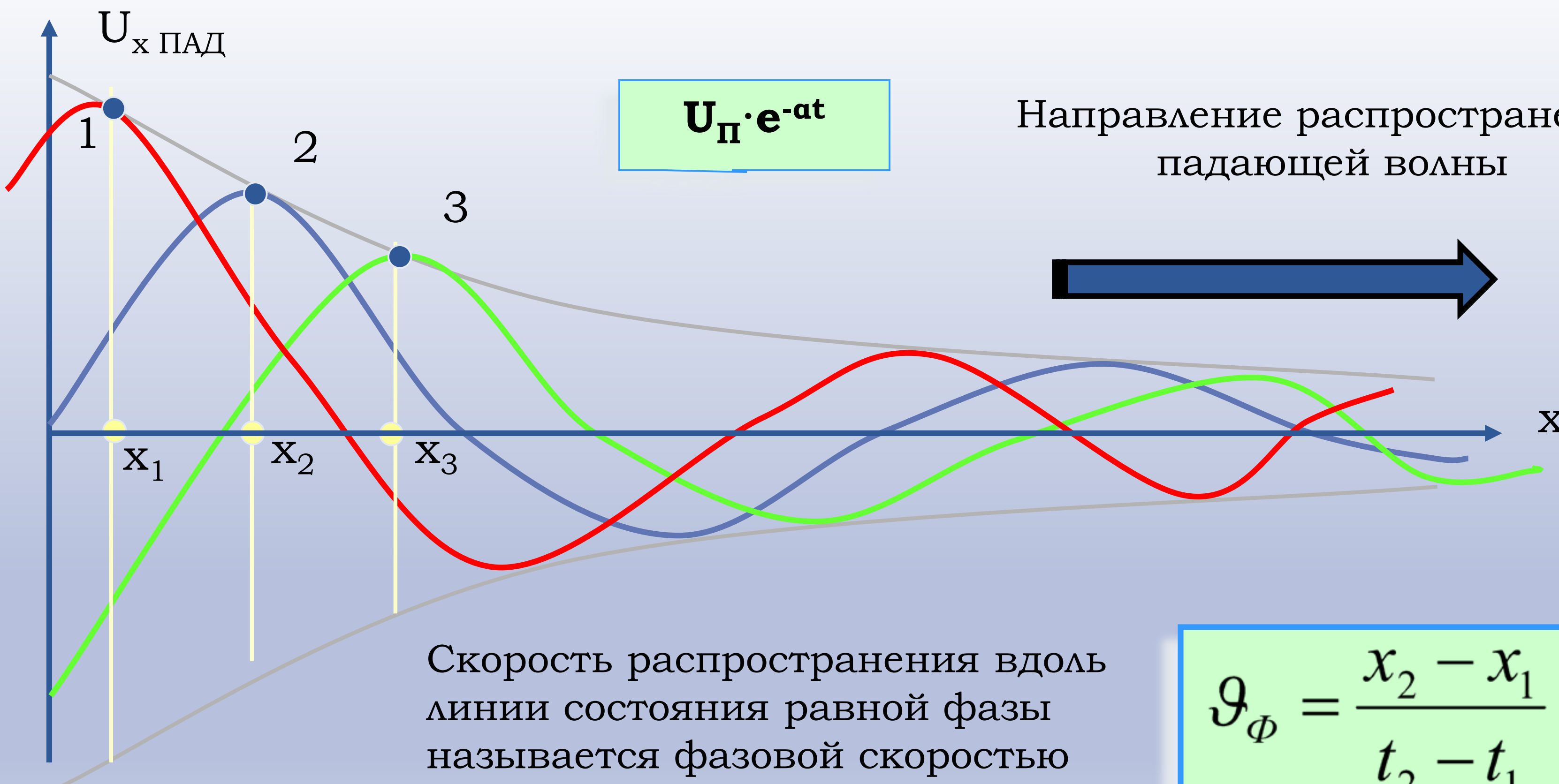
$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_{П}(x)}{\dot{Z}_B} \cdot e^{-\dot{\gamma} x} - \frac{\dot{U}_{O}(x)}{\dot{Z}_B} \cdot e^{\dot{\gamma} x} = \dot{I}_{ПАД}(x) + \dot{I}_{OTP}(x)$$

Напряжение и ток состоят из сумм двух слагаемых. Первые уменьшаются с увеличением расстояния от начала линии x, а вторые возрастают. В линии существуют <u>два типа волн</u>: падающие и отраженные волны.

Уравнения передачи для мгновенных значений напряжений и токов

$$U_x(t) = U_{\Pi} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \beta x) + U_{O} \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta x)$$

$$I_x(t) = \frac{U_{\Pi}}{Z_B} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_B) - \frac{U_{O}}{Z_B} \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta x - \varphi_B)$$



Скорость распространения вдоль линии состояния равной фазы называется фазовой скоростью

$$\vartheta_{\Phi} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$U_x(t) = U_П \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \beta x) + \underline{\underline{U_O \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta x)}}$$

$$I_x(t) = \frac{U_П}{Z_B} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_B) - \underline{\underline{\frac{U_O}{Z_B} \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta x - \varphi_B)}}$$

Эти слагаемые описывают волны точно такого же характера, как и падающие, но распространяющиеся в обратном направлении, т.е. от конца линии к началу. Такие волны называются отраженными волнами напряжения и тока. Амплитуды отраженных волн убывают от конца линии к началу. Наибольшая амплитуда отраженных волн наблюдается в конце линии.

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{ПАД}(x) + \dot{U}_{ОТР}(x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{ПАД}(x) + \dot{I}_{ОТР}(x)$$

$x = l$

$$\dot{U}(l) = \dot{U}_2 = \dot{U}_{2ПАД} + \dot{U}_{2ОТР}$$

$$\dot{I}(l) = \dot{I}_2 = \dot{I}_{2ПАД} + \dot{I}_{2ОТР}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_H = \dot{U}_{2ПАД} + \dot{U}_{2ОТР}$$

$$\dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B = \dot{U}_{2ПАД} - \dot{U}_{2ОТР}$$

Решения этой системы уравнений

$$\dot{U}_{2ПАД} = \dot{I}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_H + \dot{Z}_B}{2}$$

$$\dot{U}_{2ОТР} = \dot{I}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_H - \dot{Z}_B}{2}$$

Отношение комплексной амплитуды отраженной волны к комплексной амплитуде падающей волны называется *коэффициентом отражения по напряжению*

$$\dot{\sigma}_U = \frac{\dot{U}_{2ОТР}}{\dot{U}_{2ПАД}} = \frac{\dot{Z}_H - \dot{Z}_B}{\dot{Z}_H + \dot{Z}_B}; \rightarrow \dot{U}_{2ОТР} = \dot{\sigma}_U \cdot \dot{U}_{2ПАД}$$

Коэффициент отражения по напряжению показывает, какую часть амплитуды падающей волны в конце линии составляет амплитуда отраженной волны

Амплитуда отраженной волны тока в линии

$$\dot{I}_{2OTP}=-\frac{\dot{U}_{2OTP}}{\dot{Z}_{B}}=-\dot{\sigma}_{U}\frac{\dot{U}_{2ПАД}}{\dot{Z}_{B}}=-\dot{\sigma}_{U}\cdot\dot{I}_{2OTP};$$

$$\rightarrow\dot{I}_{2OTP}=\dot{\sigma}_{I}\cdot\dot{I}_{2ПАД}$$

$$\dot{\sigma}_{I}=-\dot{\sigma}_{U}$$

Коэффициент отражения по току равен по значению и противоположен по знаку коэффициенту отражения по напряжению

<u>Короткозамкнутая линия на конце</u> $\rightarrow Z_{Н}=0$

$$\dot{\sigma}_{U}=-1$$

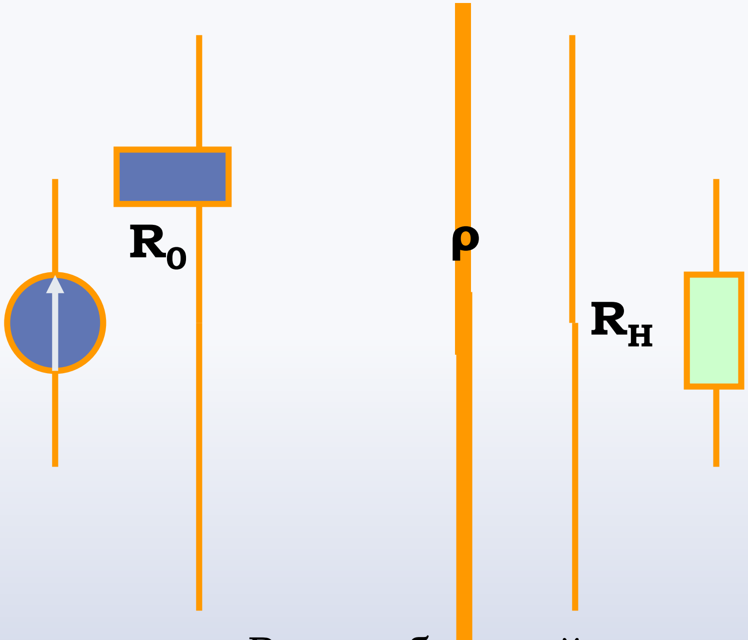
$$\dot{\sigma}_{I}=1$$

Падающая и отраженная волны напряжения в конце линии имеют равные амплитуды и сдвинуты по фазе по отношению друг другу на 180º. Амплитуда результирующей волны напряжения в конце линии будет равна нулю. В тоже время падающая и отраженная волны тока будут иметь равные амплитуды, что приведет к <u>увеличению вдвое тока</u> в конце короткозамкнутой линии

<u>Холостой ход в конце линии</u> $\rightarrow Z_{Н}=\infty$ (σ_U= 1, σ_I= -1) – «противоположное»

Режимы работы длинной линии

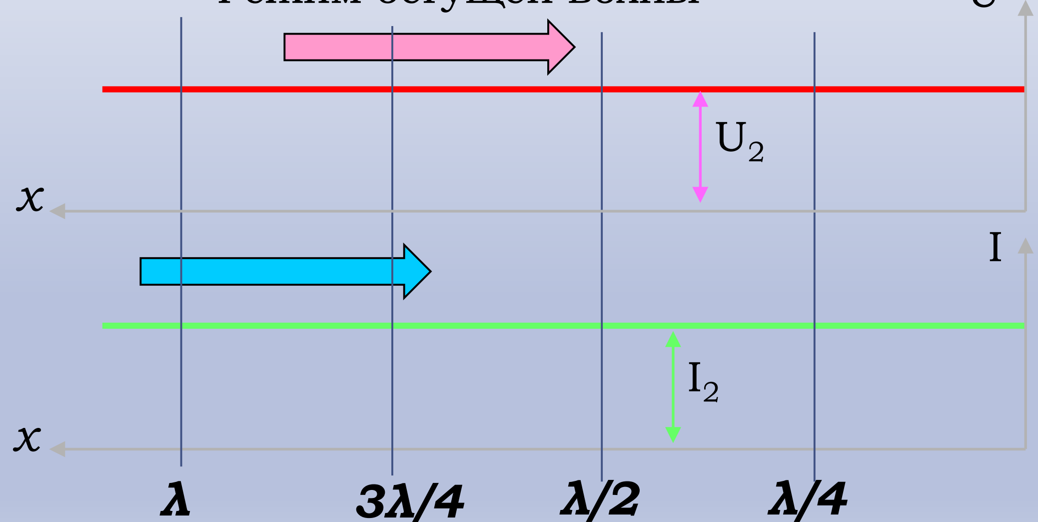
- **Режим работы длинной линии на согласованную нагрузку**



Условие согласования

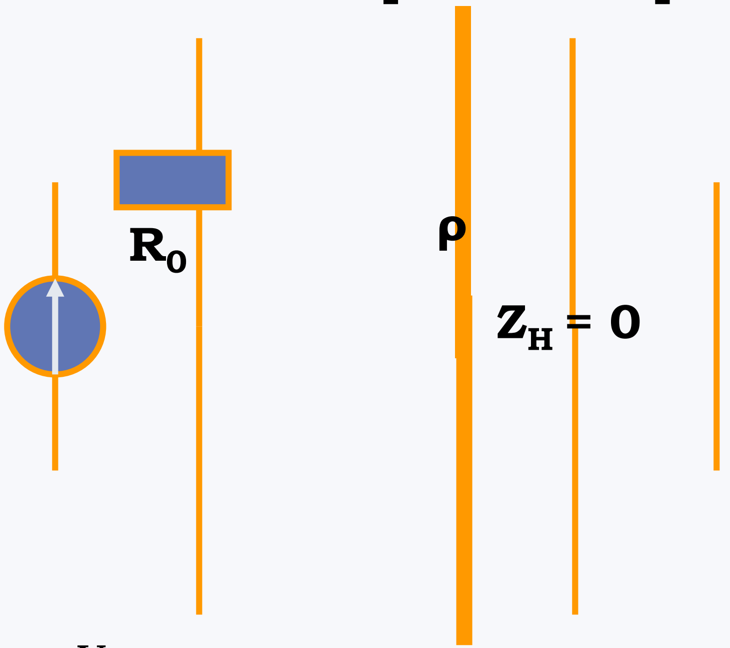
$$\dot{Z}_B = \dot{Z}_H = \rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = R_H$$

Режим бегущей волны



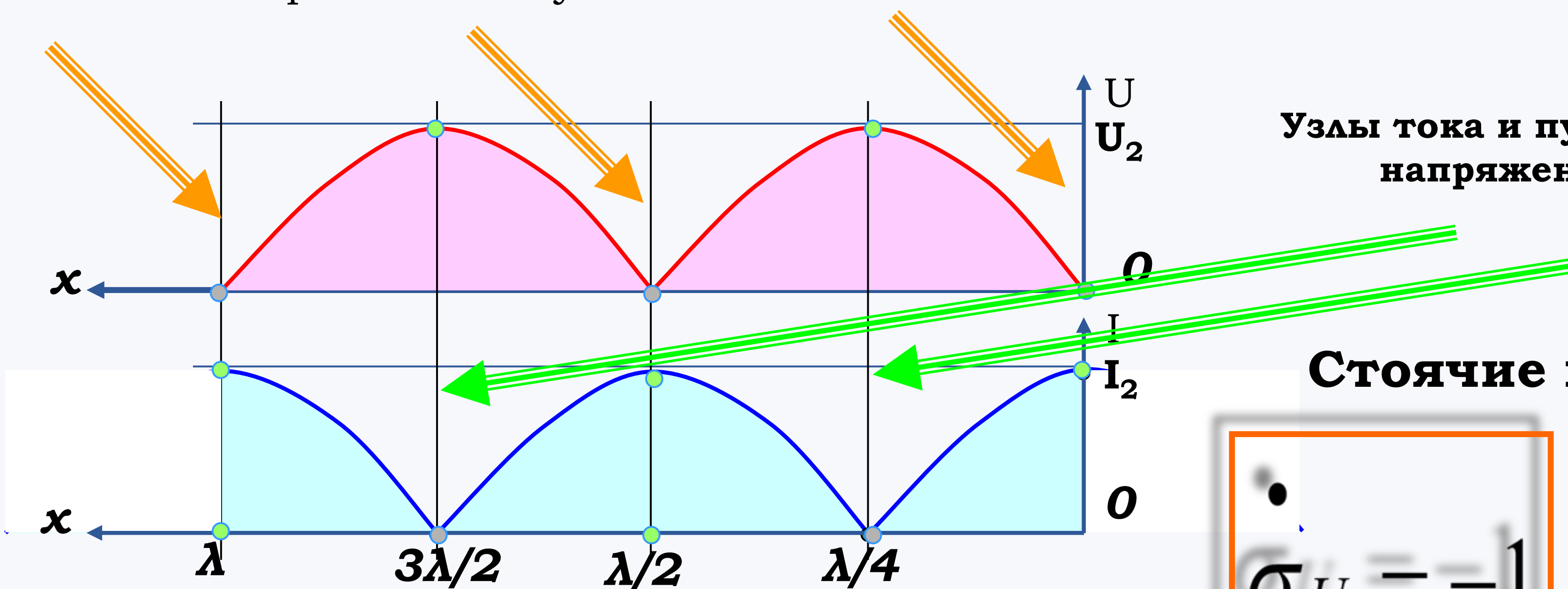
В линии существуют только падающие волны напряжения и тока, отраженных волн нет, коэффициенты отражения по напряжению и току равны нулю.

Режим работы короткозамкнутой на конце длинной линии



- Нагрузка линии энергии не потребляет.
- От нее в сторону начала линии распространяются обратные волны напряжения и тока.
- Их амплитуды равны соответственно амплитудам прямых волн напряжения и тока.

Узлы напряжения и пучности тока



Узлы тока и пучности напряжения

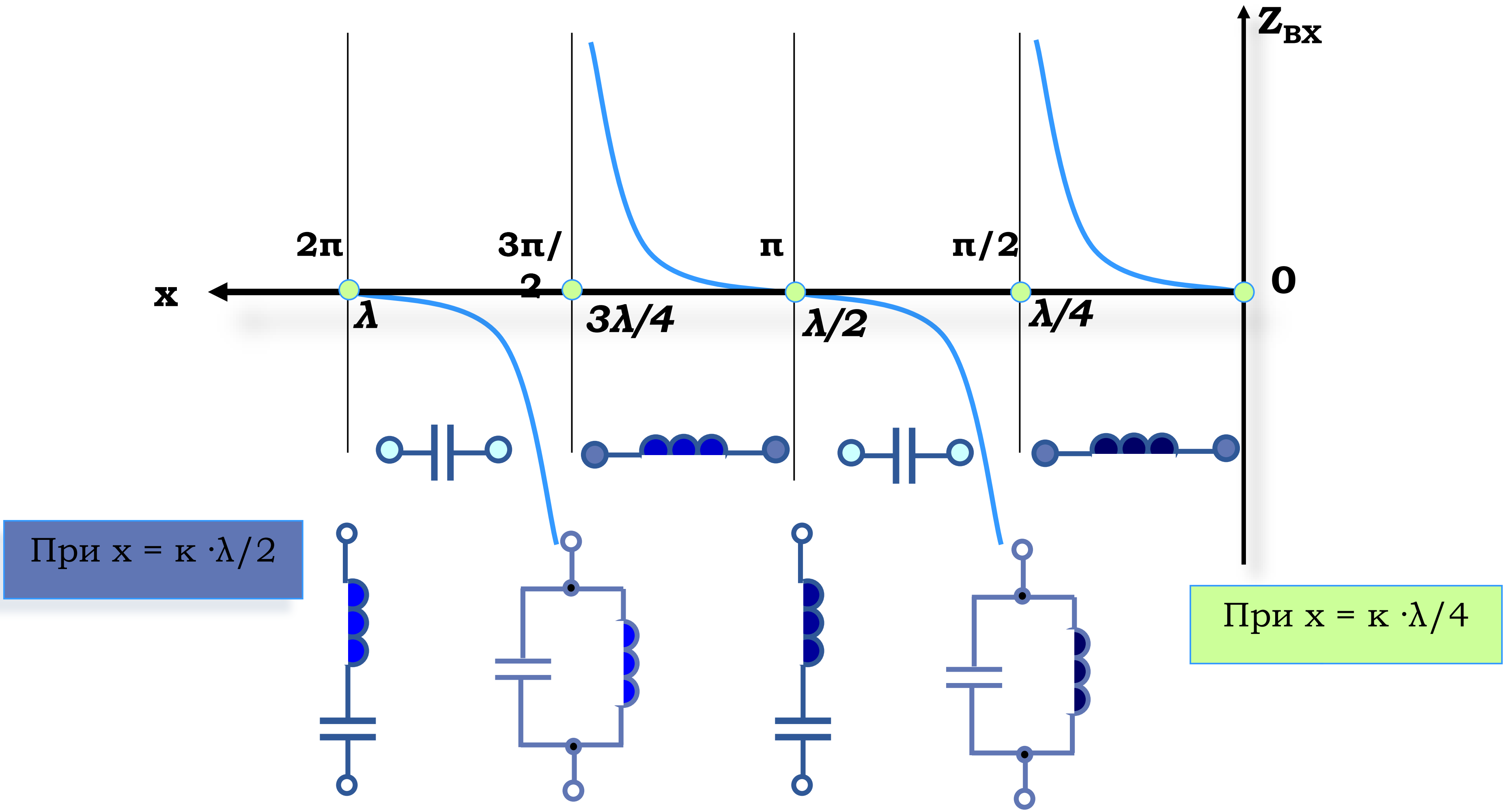
Стоячие волны

$$\dot{\sigma}_U = -1$$

$$\dot{\sigma}_I = 1$$

В режиме короткого замыкания входное сопротивление линии принимает вид

$$\dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_{BX\,K3} = jZ_{BX}tg(\beta x) = jZ_{BX}tg(\frac{2\pi}{\lambda}x) = jX_{K3}$$



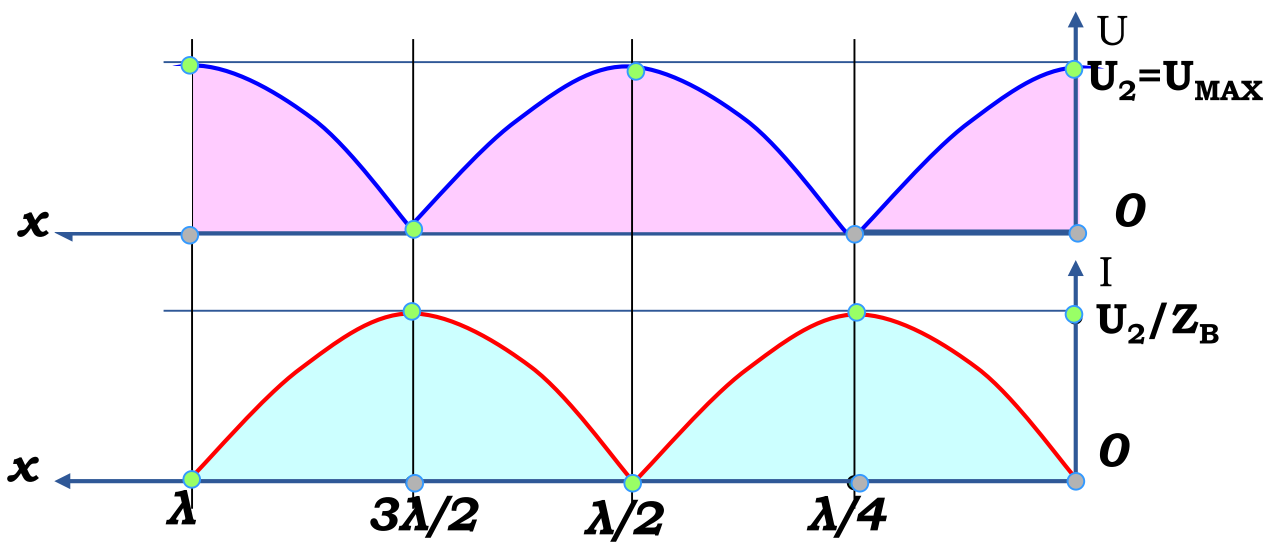
Режим холостого хода, линия разомкнута на конце $Z_Н = \infty$

В режиме короткого замыкания $I_2 = 0$, так как $Z_Н = \infty$, и уравнения передачи

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x = \dot{U}_2\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|\cdot e^{j\varphi_U} = \dot{U}\cdot e^{j\varphi_U}$$

$$\dot{I} = j\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_B}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_B}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right|\cdot e^{j(\varphi_I+\pi/2)} = \dot{I}\cdot e^{j(\varphi_I+\pi/2)}$$

Режим стоячих волн



Узлы тока и пучности напряжения

$$\boxed{\frac{2\pi\cdot x}{\lambda} = 0,\pi,2\pi}$$

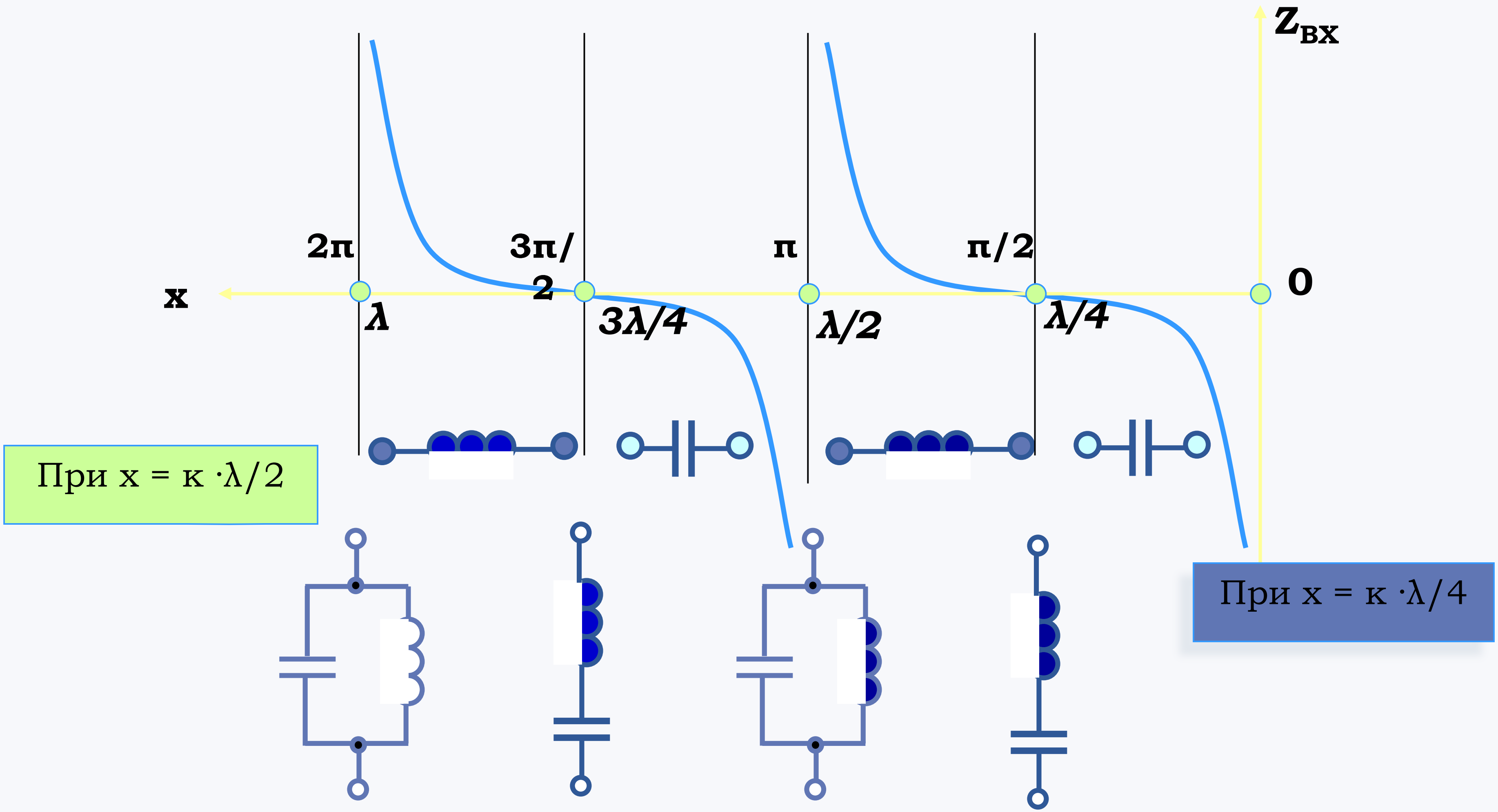
Узлы напряжения и пучности тока

$$\frac{2\pi\cdot x}{\lambda} = \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\ldots$$

В режиме холостого хода входное сопротивление линии принимает вид

$$\dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_{BX\ XX} = -jZ_{BX}ctg(\beta x) = jZ_{BX}ctg(\frac{2\pi}{\lambda}x) = jX_{XX}$$

Линия представляет собой двухполюсник с бесконечным числом резонансов

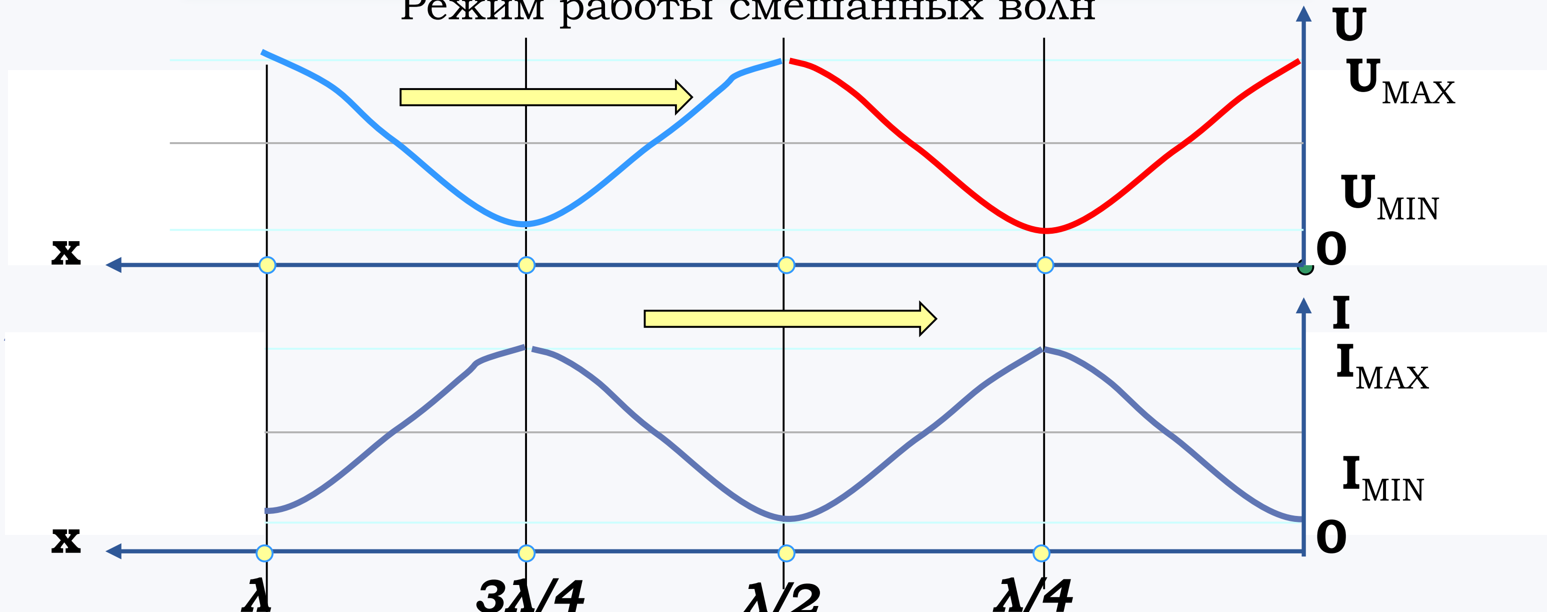


Режим работы на несогласованную нагрузку $Z_Н \neq Z_В$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \left[\cos\frac{2\pi}{\lambda}x + j\frac{\dot{Z}_B}{\dot{Z}_H}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \right]$$

$$\dot{I}(x) = \dot{U}_2 \left[\frac{1}{\dot{Z}_H}\cos\frac{2\pi}{\lambda}x + j\frac{1}{\dot{Z}_B}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \right]$$

Режим работы смешанных волн



$$k_{БВ} = \left|\frac{U_{\min}}{U_{\max}}\right| = \left|\frac{U_{ПР} - U_{ОБР}}{U_{ПР} + U_{ОБР}}\right| = \left|\frac{I_{\min}}{I_{\max}}\right|$$

$$0 \le k_{БВ} \le 1$$

Количественная степень согласования линии с нагрузкой